Chapitre II

Cinématique du point matériel

II -1 Généralités

1-1 Définition

La cinématique est l'étude des mouvements des corps indépendamment des causes qui les produident. Elle s'appuie uniquement sur les notions d'espace de temps.

a) Référentiel:

c'est un repère particulier auquel est associé une échelle de temps, En mécanique classique tous les repères sont munis d'une même horloge.

b) Evénement - mouvement:

- un événement est l'ensemble formé des coordonées d'un point et de l'instant auquel il est repéré: $M(x,y,z,t)$.

- Un mouvement caractérise l'évolution au cours du temps d'un point M et la vitesse à chaque instant sur sa trajectoire.

c) Trajectoire d'un point matériel dans un référentiel donné:

- C'est l'ensemble des positions successives du point matériel dans un référentiel donné lorsque le temps s'écoule de façon continue.

- Represénration mathématique

** En coordonnées cartésiennes*

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t).\overrightarrow{ex} + y(t).\overrightarrow{ey} + z(t).\overrightarrow{ez}$$

La donnée de ces trois fonctions permet de construire la trajectoire de façon paramétrique

** En coordonnées cylindriques*

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t).\overrightarrow{e\rho}(\varphi(t)) + z(t).\overrightarrow{ez}$$

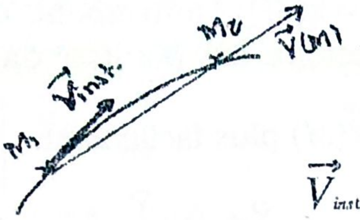
*** En coordonnées sphérique**

$$\overrightarrow{OM}(t) = r.\vec{er}[\theta(t), \varphi(t)]$$

II-2 Cinématique du point matériel

a) Vitesse d'un point matériel

Soient M_1 et M_2, deux positions successives d'une particule aux instants t_1 et t_2. On définit la vitesse moyenne par:



$$\vec{v}(M) = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1}$$

$$\vec{V}_{instantané} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Le vecteur $\vec{V}$ est tangent à la trajectoire en tout point.

Par exemple dans mouvement circulaire uniforme:

$$\begin{cases} x = R.\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) \\ y = R.\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R\dfrac{2\pi}{T}.\sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) \\ \dot{y} = R.\dfrac{2\pi}{T}.\cos\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right) \end{cases}$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \frac{2\pi R}{T} = cte \qquad\qquad x^2 + y^2 = R^2$$

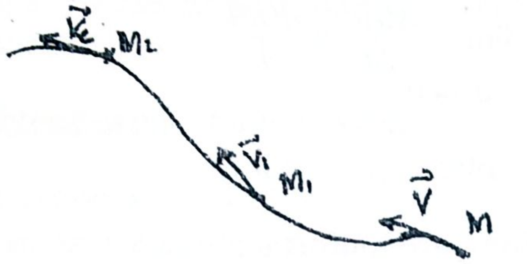
ou T période(S) et R: rayon (m)

Attention la vitesse n'est pas constante car la direction du vecteur $\vec{V}$ change avec le temps, c'est uniquement la norme qui est constante.

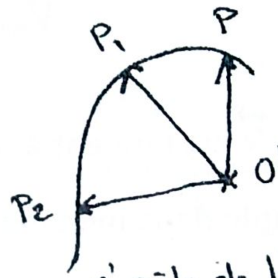
b) Hodographe du mouvement d'un point matériel M:

Considérons la figure ci- contre où M se déplace sur la trajectoire C avec une vitesse quelconque $V(M,t)$, M, M_1 *et* M_2 sont des positions auxquelles correspondent les vitesses $\vec{V}$, $\vec{V_1}$ *et* $\vec{V_2}$ aux instants t, t_1 *et* t_2 respectivement. Soit O un point fixe du repère fixe.

On appelle hodographe (H) du mouvement l'ensemble des points
P extrémité des vecteurs $\overrightarrow{O'P}$ équipollents aux vecteurs vitesses $\vec{V}(M)$ (O' pôle de l'hodographe; $\overrightarrow{O'P} = \vec{V}(M)$ autrement dit l'hodographe du mouvement est la trajectoire des points P dans l'espace des vitesses .
L'hodographe permet d'étudier la vitesse $\vec{V}(M)$ plus facilement.



(C)



o' pôle de l'hodographe

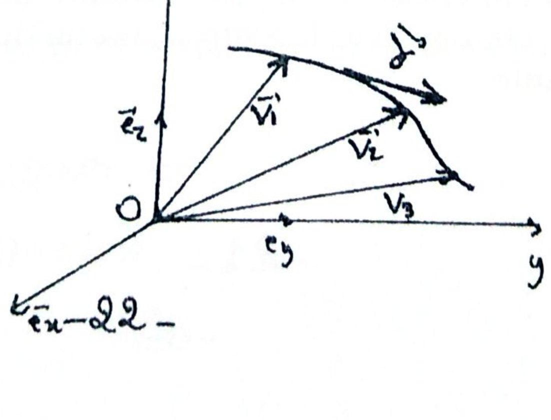
c) Accélération:

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{\vec{V_2} - \vec{V_1}}{t_2 - t_1} \quad \text{accélération moyenne}$$

$$\vec{\gamma}_{instantané}(M) = \lim_{\Delta t \to 0}\left[\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}\right] = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2(\overrightarrow{OM})}{dt^2}$$

- l'accélération est la tangente à l'hodographe:
c'est la courbe décrite par l'extrémité du vecteur vitesse.

- l'accélération n'est pas tangente à la trajectoire; elle est dirigée dans le sens de la concavité.



$$\vec{V} = \|V\|\vec{T} \qquad \vec{T} = \frac{\vec{V}}{\|V\|} = \frac{d\vec{r}}{ds} \qquad r = r(t)\ ;\ s = s(t)$$

$\vec{N} = \dfrac{d\vec{T}/ds}{\|dT/ds\|}$ est un vecteur unitaire perpendiculaite à $\vec{T}$.

En effet , on a $\vec{T}.\vec{T} = \|T\|^2 = 1$ car $\vec{T}$ est un vecteur unitaire.

En dérivant par rapport à s, on obtient $2\vec{T}.\dfrac{d\vec{T}}{ds} = 0$.

On pose $\rho = \dfrac{1}{\|dT/ds\|}$: le rayon de courbure

$$\vec{N} = \rho\frac{d\vec{T}}{ds} \qquad ; \qquad \vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$$

$$\vec{V} = \frac{ds(t)}{dt}\vec{T}$$

$$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}\vec{T} + \frac{ds(t)}{dt}\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\vec{T} + \|\vec{V}\|\frac{d\vec{T}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}\|\frac{ds}{dt} \qquad \text{or} \qquad \frac{d\vec{T}}{ds} = \left\|\frac{dT}{ds}\right\|\vec{N} = \frac{\vec{N}}{\rho}$$

d'où $$\frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{\|V\|}{\rho}\vec{N} = \frac{ds/dt}{\rho}\vec{N}$$

par conséquent $$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2s(t)}{dt^2}\vec{T} + \frac{(ds/dt)^2}{\rho}\vec{N}$$

$$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}\vec{T} + \frac{(V)^2}{\rho}\vec{N}$$

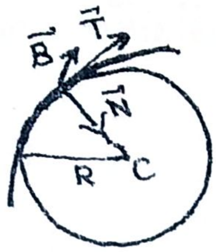
$$\vec{\gamma}(M) = \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \gamma_T\vec{T} + \gamma_N\vec{N}$$

d) Trièdre de Frenet:

Au voisinage d'un point M de la trajectoire, l'accélération a pour effet de modifier la courbure. En effet si $\gamma = 0, V = cte$ et la trajectoire est rectiligne.

c'est seulement si l'accélération est nulle que la trajectoire est courbe : elle est toujours dirigée à l'intérieur de la courbure de la trajectoire.

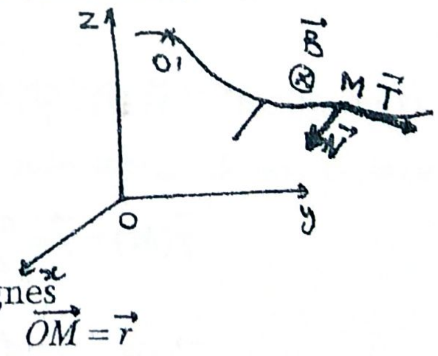
Localement, pour rendre compte des effets de l'accélération sur la trajectoire de la particule, on représente la portion de la trajectoire proche de M par un arc de cercle dont le rayon R est appelé rayon de courbure. Ce cercle est appelé cercle osculateur.



Au point M, on définit un trièdre de référence mobile appelé trièdre de Frenet.

- $\vec{T}$: dirige suivant $\vec{V}$(Tangent à la trajectoire)
- $\vec{N}$: normal, dirigé vers le centre C de la courbure,
  La direction de $\vec{N}$ est appelée *normale*.

- $\vec{B}$: il est choisi de telle façon que le trièdre $(\vec{T}, \vec{N}, \vec{B})$ soit direct,
  La directionde $\vec{B}$ est appelée *binormale*,.



O' : origine des abscisses curvilignes

$$\overset{\frown}{O'M} = |\overrightarrow{O'M}| = s(t) \qquad \overrightarrow{OM} = \vec{r}$$

$$\|\vec{V}(M)\| = \frac{ds(t)}{dt} \qquad \vec{V}(M) = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Par définition , l'élément de longueur sur une courbe est égale à $ds(t)$ et on obtient 3 formes différentes suivant la manière dont le problème est posé: équations paramétriques $(x(t), y(t), z(t))$.

Exemple

équations paramétriques $(x(t), y(t));[(y(t) = f(x(t))]$

et coordonnées polaires $r = r(\varphi)$; $r' = dr / d\varphi$

$$ds(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$$ds(t) = \sqrt{(r)^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi$$

Pour terminer la description de la trajectoire, il reste à déterminer le rayon de courbure.

On obtient une expression utile pour les calculs en effectuant le produit vectoriel des vecteurs V et γ.

$$\vec{V} \wedge \vec{\gamma} = \|\vec{V}\|.\vec{T} \wedge \left(\frac{d\|\vec{V}\|}{dt}.\vec{T} + \frac{V^2}{\rho}.\vec{N}\right)$$

$$= O + \frac{\|V\|^3}{\rho}.\vec{T} \wedge \vec{N} = \frac{|V|^3}{\rho}.\vec{B}$$

$$\|\vec{V} \wedge \vec{\gamma}\| = \frac{\|\vec{V}\|^3}{\rho} \quad \rightarrow \quad \rho = R = \frac{\|\vec{V}\|^3}{\|\vec{V} \wedge \vec{\gamma}\|}$$

ρ :rayon de courbure

$\frac{1}{R}$ c'est la courbure (on l'exprime en m^{-1})

*** Cas particulier des courbes situées dans un plan**

Quand le problème est plan, on exprime les composantes du produit vectoriel en fonction des composantes x et y et de leurs dérivées premières et secondes.

Les vecteurs vitesse et accélération pour ont composantes:

$$\vec{v}\begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{\gamma}\begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{V} \wedge \vec{\gamma}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y} \end{vmatrix}$$

où γ_T et γ_N sont respectivement l'accélération tangentielle et l'accélration normale.

Cette formule générale nous indique que:

- la composante sur la binormale $\vec{B}$ est nulle,

-Les vecteurs $\vec{\gamma}$, $\vec{V}$, $\vec{T}$ et $\vec{N}$ sont dans un plan osculateur de la trajectoire.

- $\gamma_T = \frac{d\|V\|}{dt} = \frac{d^2 s(t)}{dt^2}$ est l'accélération tangentielle, Elle ne modifie que la norme de la vitesse.

- $\gamma_N = \frac{\|V\|^2}{\rho} = \frac{(ds/dt)^2}{\rho}$ est l'accélération normale; elle modifie la direction de la vitesse (on l'appelle également accélératon centripède)

Cette décomposition permet de distinguer deux types de mouvements fondamentaux ; les mouvements rectilignes pour lequel le rayon de courbure R est infini $(\gamma_N = 0)$ et les mouvements uniformes pour lequel le vecteur vitesse est constant.
Lorsque le rayon de courbure est infini et le vecteur vitesse est constant , le mouvement est dit rectiligne uniforme.

e) Abscisse curviligne:

Sur la trajectoire, la quantité $\|\vec{V}\|$ représente la distance parcourue par unité de temps, à cette distance on donne le nom de distance curviligne car elle est définie sur une courbe qui peut présenter une forme quelconque, Par définition, on appelle abscisse curviligne $s = s(t)$ la quantité:

$$\frac{ds}{dt} = \|\vec{V}\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

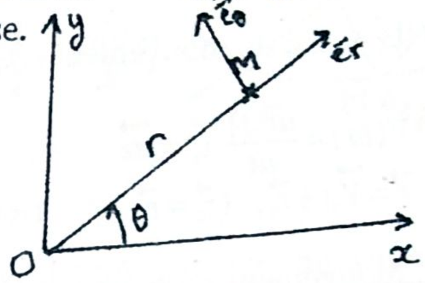
La résolution de cette équation différentielle donne la distance parcourue sur la courbe entre les instants O et t par:

$$s(t) - s(0) = \int_0^t \|V(t)\| dt$$

$$V^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \qquad R=\rho=\frac{\sqrt{\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right]^3}}{\left|\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}\right|}$$

f) Vitesse et accélération en coordonnées polaires:

Au point M, on utilise le repère orthonormé, $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$, sur lequel on décompose le vecteur vitesse.



$$\vec{e}_r=\frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$$

$\vec{e}_\theta$ est perpendiculaire à $\vec{e}_r$, dirigé vers le sens des θ croissant

$$r=\|\overrightarrow{OM}\| \qquad \overrightarrow{OM}=r\vec{e}_r \qquad \vec{V}(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right\|_R$$

$$d\vec{e}_r=d\theta\vec{e}_\theta \quad\rightarrow\quad \vec{V}(M)=\left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R=\frac{dr}{dt}\vec{e}_r+r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

Dérivons la vitesse.

$$\vec{\gamma}(M)=\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_R=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left[\frac{d\theta}{dt}\right]^2\right)\vec{e}_r+\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\gamma}(M)=\left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_R=\gamma_r\vec{e}_r+\gamma_\theta\vec{e}_\theta$$

On peut remarquer que la composante transversale se met sous la forme remarquable.

$$\gamma_\theta=\frac{1}{r}\frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt}$$

g) Exemples de mouvements simples:

g-1 Mouvement rectiligne

g1-1: mouvement rectiligne :

i- définition; On appelle mouvement rectiligne uniforme un mouvement dont la trajectoire est une droite pour lequel la vitesse est constante.

ii- Loi de mouvement r(t)

$$\vec{V}(M) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}\Big|_R = \vec{cte}$$

d'où la loi de mouvement

$$\vec{r} = \vec{V}_0 t + \vec{r}_0; \quad (\vec{r}_0 = \vec{r} \quad à \quad t = 0)$$

g1.2 : Mouvement rectiligne uniformément varie:

i - Définition; c'est le mouvement dont la trajectoire est une droite et pour lequel l'accélération est constante.

ii- Loi de mouvement de r(t)
D'après la définition on a:

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{cte}$$

d'où par intégration:

$$\vec{V} = \vec{\gamma}t + \vec{V}_0 \qquad \vec{V} = \vec{V}_0 \ \text{à} \ t=0$$

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 + \vec{V}_0 t + \vec{r}_0 \qquad \vec{r} = \vec{r}_0 \ \text{à} \ t=0$$

$\vec{V}.\vec{\gamma} > 0 \quad \rightarrow$ mouvement accéléré
$\vec{V}.\vec{\gamma} < 0 \quad \rightarrow$ mouvement retardé

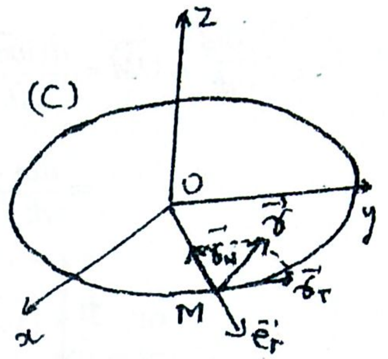
g2: mouvement circulaire:

Soit un point matériel qui décrit une trajectoire circulaire C de rayon $r = |OM|$. La position de M est définie par θ ou
$S = R\theta = \widehat{M_0M}$

La vitesse angulaire du point M est $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

Le module de sa vitesse (vitesse circonférentielle) est donnée par

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$$



Ou en coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$

$$\vec{V}(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right\|_R = r\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right\|_R = r\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$$

i- Vecteur vitesse de rotation

On définit le vecteur de rotation $\vec{\omega}$,porté par Oz, de valeur algébrique ω tel que le trièdre $(\overrightarrow{OM}, \vec{V}, \vec{\omega})$ soit direct,.
Si on forme le produit vectoriel:

$$\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \vec{e_r} & \vec{e_\theta} & \vec{e_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\omega\vec{e_\theta}$$

d'où $\vec{V}(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$

ω est un pseudo vecteur, car il est définie par un double produit vectoriel. Il est orienté suivant la règle du tir bouchon.

ii- Vecteur accélération

Par définition $\vec{\gamma}(M) = \left.\frac{d\vec{V}}{dt}\right|_R = \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{r})}{dt}$

$$= \vec{\omega} \wedge \vec{V}(M) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$$
$$= \vec{\gamma_N}(M) + \vec{\gamma_T}(M)$$

$\vec{\omega} \wedge \vec{V}(M)$ est dirigé suivant $\overrightarrow{OM}$ (il a pour module $\omega V(M) = r\omega^2$)

d'où $\gamma_N(M) = -r\omega^2 = -\frac{V^2}{r}$ (de valeur algébrique) .

alors que $\vec{\gamma}_T(M) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}$ (de valeur algébrique $\frac{d(\vec{\omega}.\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{M}}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$) est dirigé suivant la tangente (support du vecteur vitesse $\vec{V}$), car

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = \frac{d(\omega\vec{e_z})}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = \frac{d\omega}{dt}\vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM} + \omega\frac{d\vec{e_z}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$= \frac{d\omega}{dt}\vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM} \qquad \text{car } \vec{e_z} \text{ est fixe dans R}$$

or, $\vec{e_z} \wedge \overrightarrow{OM}$ est un vecteur parallèle à la vitesse $\vec{V}$ donc parallèle à $\vec{T}$.

donc $\vec{ez} \wedge \overrightarrow{OM} = \|\vec{ez} \wedge \overrightarrow{OM}\|\vec{T} = r.\vec{T}$

d'où $\frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{OM} = r\frac{d\omega}{dt}\vec{T}$

ainsi $\vec{\gamma}(M) = r\omega^2\vec{N} + r\frac{d\omega}{dt}\vec{T}$; N vecteur unitaire dirigée suivant $\overrightarrow{MO}$

Le mouvement circulaire est dit uniforme si V est constante. Dans ce cas $\vec{\gamma}(M)$ se réduit à $\vec{\gamma}_N(M)$ (normale ou centripède)

g-3 Mouvement hélicoidal

Il s'agit du mouvement résultant de la composition d'un mouvement plan circulaire uniforme et d'une translation rectiligne normale au plan du mouvement précèdent. Le mobile se meut donc sur un cylindre de rayon R(rayon du cercle) et trace une hélice dont les équations paramétriques,

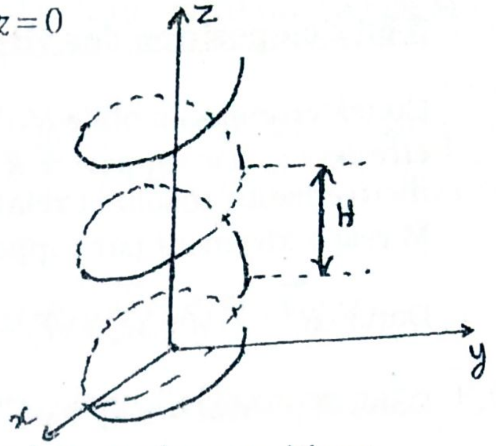
$$\begin{cases} x = R.\cos wt \\ y = R.\sin wt \\ z = Kwt \end{cases}$$

Où la translation se fait dans la direction Oz perpendiculaire au plan xOy.

W est la vitesse angulaire du mobile.
K est constant, t = temps
En dérivant / temps

$$\vec{V}(M) = \begin{vmatrix} Vx = -Rw.\sin wt \\ Vy = Rw.\cos wt \\ Vz = Kw \end{vmatrix}$$

$$\vec{\gamma}(M) = \begin{vmatrix} \gamma x = -Rw^2.\cos wt \\ \gamma y = -Rw^2.\sin wt \\ \gamma z = 0 \end{vmatrix}$$



Le pas de l'hélice (distance séparant deux positions successives du mobile sur une même génératrice) est:

$H = KwT = Kw.\dfrac{2\pi}{w} = 2\pi K$

et son rayon de couburеρ peut se calculer en écrivant:

$$\gamma = \gamma_N = V^2/\rho = w^2 R$$
$$avec V^2 = V^2x + V^2y + V^2z$$
$$d'où \quad \rho = R + K^2/R$$

II-3 Changements de référentiels, composition des mouvements

3-a) Introduction:

Jusqu'à présent, on a supposé que le mouvement d'un point matériel était décrit par rapport à un repère fixe . En fait, on peut définir un mouvement par rapport à un repère quelconque lui même en mouvement par rapport à un repère fixe.

Exemple: mouvement d'une personne dans le train ,puis mouvement du train par rapport à la terre.

Soient $R = R\left(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\right)$ et $R' = R'\left(O', \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}\right)$ deux repères dont le premier est fixe et le deuxième mobile. On les appelle respectivement absolu et relatif.

R' est en mouvement quelconque par rapport R .

3-b)) Composition des vitesses:

Considérons un mobile M dont le mouvement peut être repéré par rapport à R ou R' Nous appelerons mouvements absolu et relatif, les mouvements de M respectivement par rapport à R et R' .

Dans R , $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

Dans R', $\overrightarrow{OM'} = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} + z'\vec{e}_{z'}$

Par définition la vitesse absolue de M est donnée par :

$$\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$$

Par Notons que: $\left(\frac{d\vec{e}_x}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_y}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)_R = \vec{0}$

car $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ sont fixes dans R

On remarque que

$$\vec{V}_a(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$$

$$\vec{V}_a(M/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + x'\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_R + y'\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_R + z'\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_R + \dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}$$

Le terme $\dot{x}'\vec{e}_{x'} + \dot{y}'\vec{e}_{y'} + \dot{z}'\vec{e}_{z'}$ représente la vitesse du point dans le référentiel relatif, on l'appelle vitesse relative et on la note $\vec{V}_r(M/R')$.

La vitesse absolue s'écrit alors:

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_r(M/R') + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + x'\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_R + y'\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_R + z'\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_R$$

On définit la vitesse d'entraînement du mobile M par:

$$\vec{V}_e(M) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + x'\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_R + y'\left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_R + z'\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_R$$

Il vient que :

$$\vec{V}_a(M/R) = \vec{V}_r(M/R') + \vec{V}_e(M)$$

Interprétation de la vitesse d'entraînement : $\vec{V}_e(M)$

$\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R$ représente la vitesse du point O' par rapport à R . C'est pourquoi on la note $\vec{V}(O'/R)$.

Considérons un point N fixe dans R' et qui a à l'instant t choisi coïncide avec le point M. Rappelons que le point M est mobile dans R'.

Soient $\overrightarrow{O'N} = x'_N\vec{e}_{x'} + y'_N\vec{e}_{y'} + z'_N\vec{e}_{z'}$ à l'instant t

et $\overrightarrow{O'M} = x'(t)\vec{e}_{x'} + y'(t)\vec{e}_{y'} + z'(t)\vec{e}_{z'}$

Calculons la vitesse absolue du point N.

$$\vec{V}_a(N/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{ON}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'N}}{dt}\right)_R$$

$$\vec{V}_a(N/R) = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + x'_N\left(\frac{d\vec{e}_{x'_N}}{dt}\right)_R + y'_N\left(\frac{d\vec{e}_{y'_N}}{dt}\right)_R + z'_N\left(\frac{d\vec{e}_{z'_N}}{dt}\right)_R + \dot{x}'_N\,\vec{e}_{x'_N} + \dot{y}'_N\,\vec{e}_{y'_N} + \dot{z}'_N\,\vec{e}_{z'_N}$$

Or $\dot{x}'_N = \dot{y}'_N = \dot{z}'_N = 0$ car le point N est fixe dans R'.

il vient que :

$$\vec{V}_a(N/R)=\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + x'_N\left(\frac{d\vec{e}_{x'_N}}{dt}\right)_R + y'_N\left(\frac{d\vec{e}_{y'_N}}{dt}\right)_R + z'_N\left(\frac{d\vec{e}_{z'_N}}{dt}\right)_R$$

On déduit que $\vec{V}_a(N/R)=\vec{V}_e(M)$ à l'instant t. D'où le théorème:

Théorème : La vitesse d'entraînement de M est la vitesse absolue qu'aurait un point N fixe dans R' qui à l'instant t serait en coïncidence avec le mobile M.

Dérivée d'un vecteur par rapport au temps , relative à R. et à R':
Soit u un vecteur en mouvement quelconque, on démontre la relation fondamentale appelée formule de Bour donnée par :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R=\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{R'}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{u}$$

$\vec{\Omega}_{R'/R}$ est la vitesse de rotation du repère R' par rapport à R.
Le résultat a une très grande importance pratique. Il permet , connaissant les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ dans de R', de déterminer les composantes dans la base R' de sa dérivée relative à une autre base R.

En particulier si $\vec{u}$ appartient à R' (fixe dans R') alors

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R=\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{u}$$

en particulier pour les vecteurs unitaires de la base R':

$$\left(\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}\right)_R=\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{e}_{x'} \qquad \left(\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}\right)_R=\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{e}_{y'} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}\right)_R=\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{e}_{z'},$$

d' où la vitesse d'entraînement s'écrit:

$$\vec{V}_e(M)=\vec{V}_e(M^*)=\vec{V}(O'/R)+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

3-c) Composition des accélérations:

Par définition, on appelle accélération absolue $\vec{\gamma}_a(M/R)$ dans R . Elle s'écrit :

$$\vec{\gamma}_a(M/R)=\left(\frac{d\vec{V}_a(M/R)}{dt}\right)_R=\left(\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right)_R$$

$$\vec{\gamma}_a(M/R)=\left(\frac{d\vec{V}_r(M/R')}{dt}\right)_R+\left(\frac{d\vec{V}_e(M^*)}{dt}\right)_R$$

$$\vec{\gamma}_a(M/R)=\vec{\gamma}_r(M/R')+\vec{\gamma}_c(M)+\vec{\gamma}_e(M^*)$$

avec $\vec{\gamma}_r(M/R')=\left(\frac{d\vec{V}_r(M/R')}{dt}\right)_{R'}$ qu'on appelle accélération relative.

$$\vec{\gamma}_c(M)=2\,\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\vec{V}_r(M/R')$$

qu'on appelle accélération de Coriolis.

$$\vec{\gamma}_e(M)=\vec{\gamma}(O'/R)+\left(\frac{d\vec{\Omega}_{R'/R}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\left(\vec{\Omega}_{R'/R}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

qu'on appelle accélération d'entraînement.